Kniha geometrických kouzel

Matematická expedice

David Acheson

DOKOŘÁN

Z anglického originálu *The Wonder Book of Geometry: A Mathematical Story* přeložil Jiří Rákosník.

ISBN 978-80-7675-142-2

Obsah

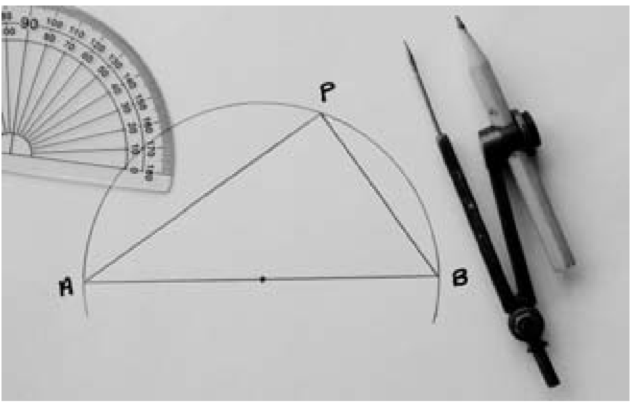
1

Úvod

Všechno to začalo ve škole jednoho chladného zimního rána v roce 1956, když mi bylo deset let.

Pan učitel Harding předváděl nějakou matematiku na tabuli, od křídy se jen prášilo. Náhle se otočil a řekl nám, ať nakreslíme půlkružnici o poloměru AB.

Na půlkružnici jsme pak měli zvolit nějaký bod P, spojit ho úsečkami s body A a B a změřit velikost úhlu při bodu P (obrázek 1).



Obr. 1: Thaletova věta.

Pustil jsem se pěkně do toho a mimoděk jsem předpokládal, že úhel bude záviset na tom, kde přesně na půlkružnici se bod P nachází.

Tak tomu však *není*.

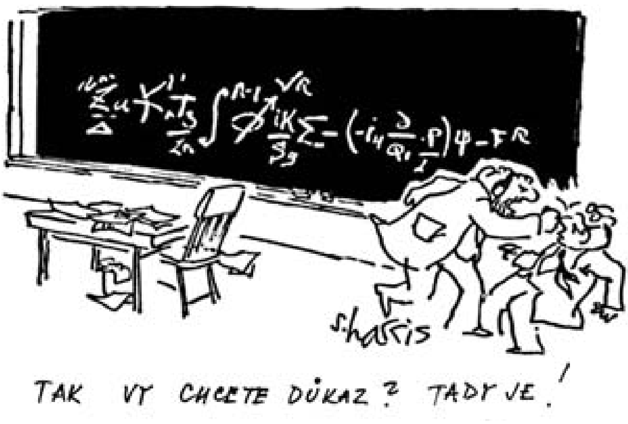
Je vždycky pravý.

* * *

Neměl jsem tehdy tušení, že matematika je plná podobných překvapení. Nevěděl jsem ani, že jde o jednu z prvních velkých vět geometrie, pocházející od starořeckého matematika, který se jmenoval Thales. Od něj údajně pochází výrok, že klíčová otázka nezní „Co víme?“, nýbrž „*Jak to víme?*“.

Proč je tedy ten úhel v půlkružnici vždy pravý?

Krátká odpověď je, že to umíme *dokázat* pomocí řady logických kroků vycházejících z několika zřejmých počátečních předpokladů.



Obr. 2: Důležitost důkazu.

A doufám, že se mi právě tímto způsobem podaří na následujících stránkách nejen položit jisté základy geometrie, ale udělat ještě mnohem víc.

Geometrie totiž umožňuje, aby člověk v téměř jakémkoli věku *za pouhou půlhodinu* uviděl leccos z celé podstaty a ducha matematiky v její nejlepší podobě.

A jestli mi nevěříte...

2

ZAČÍNÁME

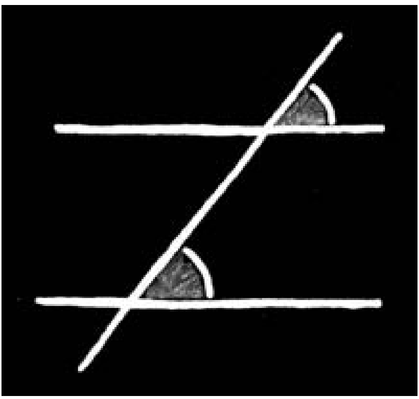
První opravdu velká myšlenka se týká *rovnoběžek*.

To jsou přímky v téže rovině, které se nikdy neprotnou, ať je prodloužíme jakkoli daleko.

A o nich teď vyslovíme dva předpoklady.

Rovnoběžky

Můžete si představit dvě přímky, které protíná třetí přímka tak, že s nimi vytvoří takzvané *souhlasné úhly*, jako na obrázku 3.



Obr. 3: Souhlasné úhly.

Téměř v celé knize budeme vycházet z následujících předpokladů:

(1) Jsou-li dvě přímky rovnoběžné, pak mají souhlasné úhly stejnou velikost.

(2) Mají-li souhlasné úhly stejnou velikost, pak jsou příslušné dvě přímky rovnoběžné.

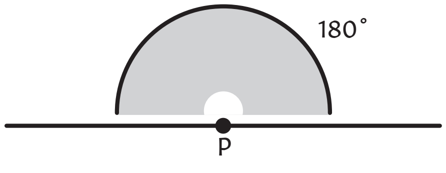
Tyto předpoklady jsou založeny na intuitivní představě, že rovnoběžky musejí mít, abychom tak řekli, „stejný směr“. Jakkoli samozřejmé se však výroky (1) a (2) mohou zdát, *jsou to předpoklady*.

A hned na samém začátku je dobré si uvědomit, že jsou to v podstatě dvě velmi odlišná tvrzení.

Zatímco díky (1) můžeme rovnoběžky používat, (2) nám umožňuje ukázat, že vůbec nějaké máme.

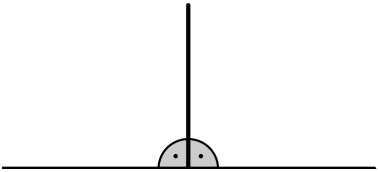
Úhly

Velikost úhlů budeme měřit ve *stupních* označovaných symbolem °, přičemž dvě části téže přímky procházející nějakým bodem P tvoří úhel velikosti 180° (obrázek 4).



Obr. 4: Přímka a přímý úhel.

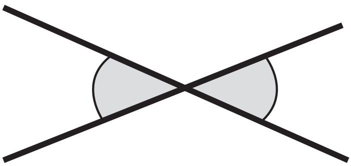
Pravý úhel má poloviční velikost (tedy 90°) a o dvou přímkách, které ho tvoří, říkáme, že jsou navzájem kolmé (obrázek 5).



Obr. 5: Pravé úhly.

Vrcholové úhly

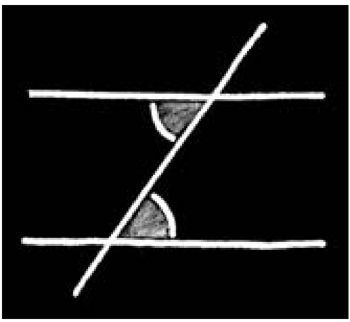
Když se dvě přímky protnou, dva takzvané *vrcholové úhly* mají stejnou velikost (obrázek 6).



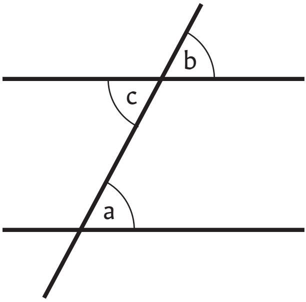
Obr. 6: Vrcholové úhly.

Střídavé úhly

Jsou-li dvě přímky rovnoběžné a třetí přímka je protíná, pak takzvané *střídavé úhly* mají stejnou velikost (obrázek 7).



Obr. 7: Střídavé úhly.



Obr. 8: Důkaz toho, že střídavé úhly mají stejnou velikost.

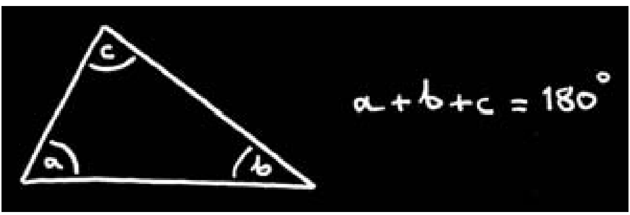
Je to z toho důvodu, že podle obrázku 8 je $a = b$ (souhlasné úhly) *a zároveň* $b = c$ (vrcholové úhly), takže $a = c$.

Odůvodnění funguje také obráceně, takže když mají střídavé úhly stejnou velikost, příslušné dvě přímky musejí být rovnoběžné.

A když teď máme k dispozici tyto úvahy, jsme připraveni dokázat první větu, která podle mého názoru není ani trochu samozřejmá...

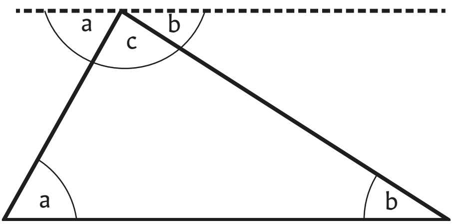
Součet úhlů v trojúhelníku

Tři úhly v libovolném trojúhelníku dávají dohromady 180° (obrázek 9).



Obr. 9: Úhly v trojúhelníku.

Abyste to dokázali, narýsujte přímku procházející jedním z vrcholů a rovnoběžnou s protější stranou trojúhelníka (obrázek 10).



Obr. 10: Důkaz součtu úhlů v trojúhelníku.

Úhly a pak mají stejnou velikost (střídavé úhly).

Ze stejného důvodu mají i oba úhly b stejnou velikost.

A protože úhly a, b, c při nově narýsované přímce dohromady tvoří přímý úhel, platí $a + b + c = 180^\circ$, čímž je důkaz hotov.