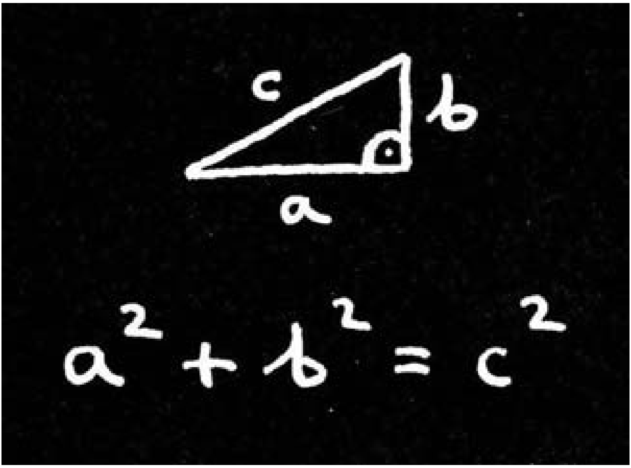
6

PYTHAGOROVA VĚTA

Mezi délkami stran *každého* pravoúhlého trojúhelníka platí překvapivě jednoduchý vztah (obrázek 24).

A tak jako mnoho jiných nejlepších věcí v matematice, je to právě tato *obecnost*, která dává větě sílu.



Obr. 24: Pythagorova věta.

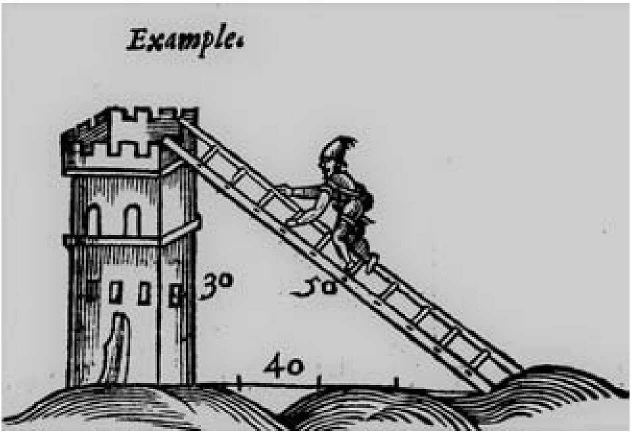
Písmenem *c* je na obrázku 24 označena délka *přepony* – strany proti pravému úhlu – a písmena *a*, *b* označují délky zbývajících dvou stran.

Zvláštní případ

Mají-li dvě kratší strany délky 3 a 4, pak $a^2 + b^2 = = 9 + 16 = 25$, takže c musí být 5.

Myšlenku pravoúhlého trojúhelníka se stranami 3, 4 a 5 znali babylonští matematici (dnes je tato oblast součástí Iráku) už víc než tisíc let před Pythagorem. Jedna starověká hliněná tabulka například obsahuje geometrickou úlohu, kterou lze interpretovat následujícím způsobem:

> Žebřík o délce 5 jednotek stojí svisle u stěny. Horní konec žebříku sklouzne o 1 jednotku dolů. Jak daleko od zdi se odsune jeho dolní konec?



Obr. 25: Zvláštní případ 3–4–5 Pythagorovy věty v knize Johna Babingtona *A short treatise of geometry* (Krátké pojednání o geometrii) z roku 1635.

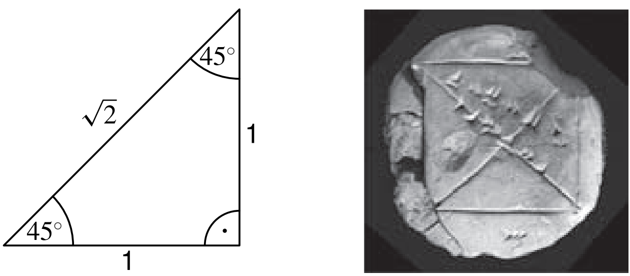
Pravoúhlý trojúhelník o stranách 3, 4, 5 je tak dobře známý, že se občas zaměňuje za samu Pythagorovu větu. Přesto je to, jak jsme zdůraznili, jen jeden velmi zvláštní případ (obrázek 25).

A v mnoha ohledech to není ten nejdůležitější zvláštní případ...

Nečekaně iracionální

Jsou-li dvě kratší strany pravoúhlého trojúhelníka *stejně dlouhé*, pak jsou délky tří stran podle Pythagorovy věty v poměru $1 : 1 : \sqrt{2}$ (obrázek 26a).

I to bylo známo dlouho před Pythagorem. Slavná babylonská hliněná tabulka označená YBC 7289 z doby kolem roku 1700 př. n. l. ukazuje čtverec se dvěma úhlopříčkami a různá čísla zapsaná v matematickém značení té doby (obrázek 26b).



(a) (b)

Obr. 26: Jiný zvláštní případ Pythagorovy věty.

Jedno z těch čísel vyjadřující poměr délky úhlopříčky k délce strany má v současném desetinném zápisu tvar

$$1{,}4142128$$

a od čísla $\sqrt{2}$ se liší o *pouhou jeho jednu miliontinu*.

Důležitost tohoto zvláštního případu pramení z Pythagorova objevu, že $\sqrt{2}$ je *iracionální*, takže podíl délek úhlopříčky a strany čtverce nelze přesně vyjádřit podílem dvou celých čísel.

Obr. 27: Jedna z mála věcí, které o Pythagorovi víme poměrně jistě, je to, že zkoumal souvislosti mezi matematikou a hudbou. Dřevoryt z roku 1492 je z knihy Franchina Gaffuria *Theoria musicae* (Teorie hudby).

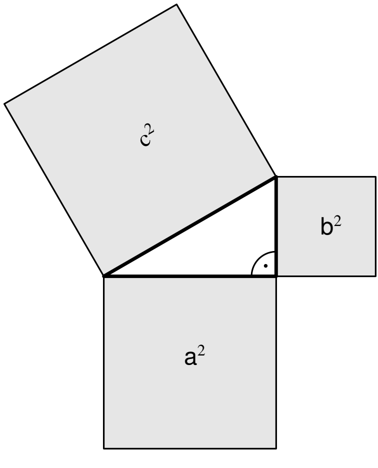
Jinými slovy není možné najít takovou jednotku délky, *byť sebemenší*, aby byly délky úhlopříčky a strany čtverce vyjádřeny v jejích celočíselných násobcích.

Pro pythagorejský světový názor to byl obrovský šok a o staletí později měl dokonce hluboký vliv na strukturu Eukleidových *Základů*.

Tři důkazy Pythagorovy věty

Zatím jsme Pythagorovu větu představili jako nečekaně jednoduchý vztah mezi třemi *délkami*.

Rovnice $a^2 + b^2 = c^2$ ovšem zřejmě také vyjadřuje zvláštní vztah mezi *obsahy* tří čtverců, které můžeme sestrojit nad stranami trojúhelníka (obrázek 28).



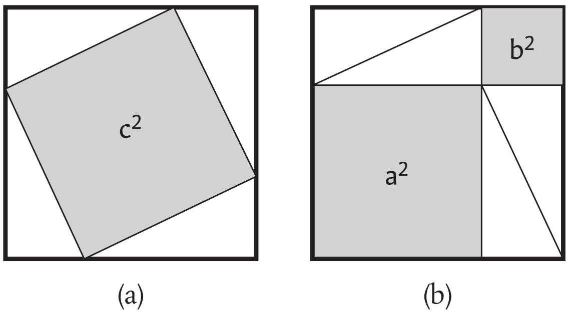
Obr. 28: Jiný pohled na Pythagorovu větu.

A takový pohled na věc je ve skutečnosti základem celé řady různých důkazů Pythagorovy věty.

„Důkaz obrázkem“

Uspořádejme čtyři kopie původního pravoúhlého trojúhelníka podle obrázku 29a. Uprostřed vznikne čtverec o obsahu c^2.

Teď si ty trojúhelníky představme jako bílé dlaždice na tmavé podlaze a přemístěme je do polohy na obrázku 29b.



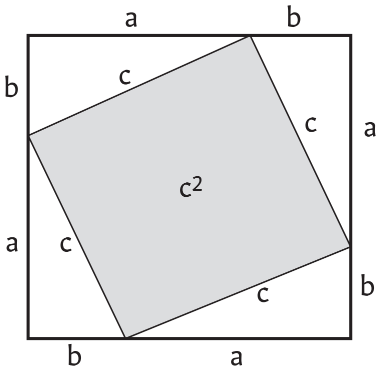
Obr. 29: Nejjednodušší důkaz Pythagorovy věty?

Plocha nezakrytá trojúhelníkovými dlaždicemi má nyní velikost $a^2 + b^2$, musí však samozřejmě být stejně velká jako předtím, a tedy

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

„Jednoduchý a snadný“

Tento důkaz sice začíná stejným obrázkem, využívá však trochu algebry.



Obr. 30: Algebraický důkaz.

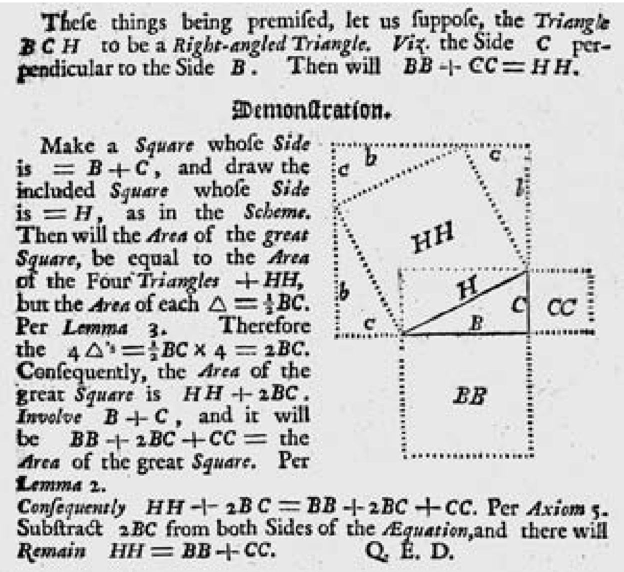
Obsah velkého čtverce na obrázku 30 je

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Velký čtverec se však skládá z menšího čtverce o obsahu c^2 a čtyř trojúhelníků, z nichž každý má obsah $\frac{1}{2}ab$. Obsah velkého čtverce je tedy $c^2 + 2ab$, takže

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Nejstarší jasné vysvětlení tohoto důkazu jsem našel v knize Johna Warda *The young mathematician's guide: being a plain and easie introduction to the mathematics, in five parts* (Průvodce mladého matematika: jednoduchý a snadný úvod do matematiky v pěti částech) z roku 1707, která byla ve své době jednou z nejoblíbenějších a nejprodávanějších knih o matematice (obrázek 31).


Theſe things being premiſed, let us ſuppoſe, the *Triangle* *BCH* to be a *Right-angled Triangle*. *Viz.* the Side *C* perpendicular to the Side *B*. Then will *BB* + *CC* = *HH*.

Demonſtration.

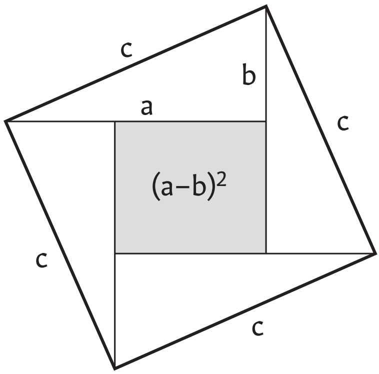
Make a *Square* whoſe *Side* is = *B* + *C*, and draw the included *Square* whoſe *Side* is = *H*, as in the *Scheme*. Then will the *Area* of the *great Square*, be equal to the *Area* of the Four *Triangles* + *HH*, but the *Area* of each △ = ½*BC*. Per *Lemma* 3. Therefore the 4△'s = ½*BC* × 4 = 2*BC*. Conſequently, the *Area* of the great *Square* is *HH* + 2*BC*. *Involve* *B* + *C*, and it will be *BB* + 2*BC* + *CC* = the *Area* of the great *Square*. Per *Lemma* 2.
Conſequently *HH* + 2*BC* = *BB* + 2*BC* + *CC*. Per *Axiom* 5.
Subſtract 2*BC* from both Sides of the *Æquation*, and there will *Remain* *HH* = *BB* + *CC*. Q. E. D.

Obr. 31: Z knihy *Průvodce mladého matematika*.

Pythagoras v Číně?

Podobná, a přesto jiná úvaha využívá obrázku 32.

Opět jsou tu čtyři kopie původního trojúhelníka, z nichž každý má obsah $\frac{1}{2}ab$, ale tentokrát jsou umístěny *uvnitř* čtverce o obsahu c^2 tak, že uprostřed ponechávají malý čtverec o obsahu $(a-b)^2$.

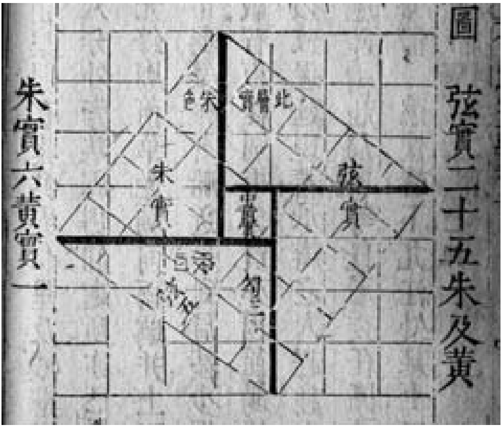


Obr. 32: Další algebraický důkaz.

Platí tedy $(a-b)^2 + 2ab = c^2$, a protože $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, dostáváme opět

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Obrázek použitý v tomto důkazu lze zřetelně uvidět v jednom z nejstarších a nejproslulejších čínských matematických textů *Čou-pi suang ťing* (obrázek 33).



Obr. 33: Z kopie textu *Čou-pi* vytištěné za mingské dynastie v roce 1603.

Protože *Čou-pi* pochází možná už z 11. století př. n. l., uvádí se někdy jako jeden z prvních „důkazů“ Pythagorovy věty. Přeložit a vysvětlit doprovodný text je ovšem nesmírně obtížné a specialisté na historii čínské matematiky se dosud neshodli na jeho skutečném významu (Poznámky, strana 247).

V každém případě platí, že důkaz v Eukleidových *Základech* se liší od všeho, co jsme dosud viděli.

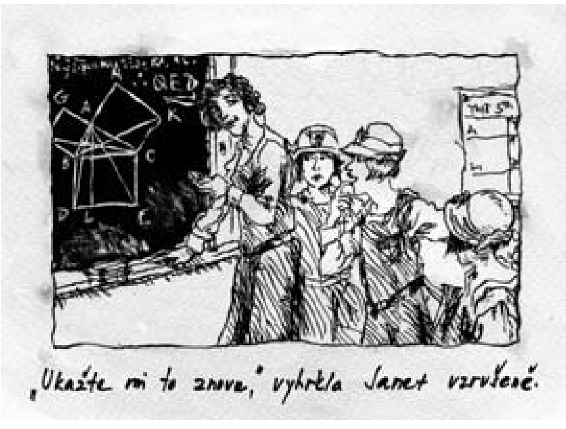
A někteří by řekli, že je trochu děsivý...

7

ZAMILOVANÝ DO GEOMETRIE?

V knize *Brief lives* (Stručné životopisy) od Johna Aubreye je slavná pasáž o filozofovi ze 17. století Thomasi Hobbesovi.

> Bylo mu už 40, když obrátil pozornost ke geometrii, a stalo se to náhodou. Když byl v pánské knihovně, ležely tam otevřené Eukleidovy *Základy*, konkrétně 47. tvrzení v knize I. Přečetl si tvrzení. „Můj Bože," zvolal (občas se pro zdůraznění zapřísahal), „*to je nemožné!*"



Obr. 34: Eukleidův důkaz Pythagorovy věty.

Tvrzení 47 v první knize Eukleidových *Základů* není nic jiného než Eukleidova formulace a důkaz Pythagorovy věty (obrázek 34) a mnozí lidé shledávají Eukleidův obrázek dosti odstrašujícím. (Mne v mých deseti letech v roce 1956 rozhodně děsil.)

Hobbes však reagoval zcela jinak, a třebaže se mu samo tvrzení zdálo téměř neuvěřitelné, nepolevil a procházel důkaz krok za krokem, dokud nebyl o jeho správnosti přesvědčen.

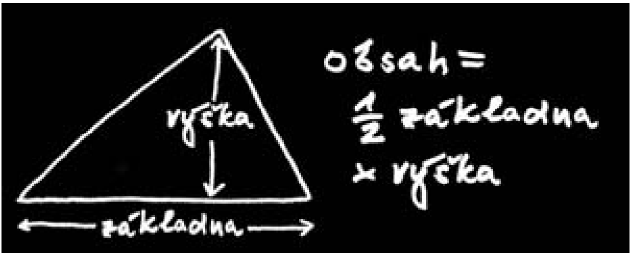
A podle Aubreye se díky tomu

zamiloval do geometrie.

Rozhodně stojí za to Eukleidův důkaz provést. Nejprve se však musíme trochu podrobněji podívat na celou tu myšlenku *obsahu*.

Obsah trojúhelníka

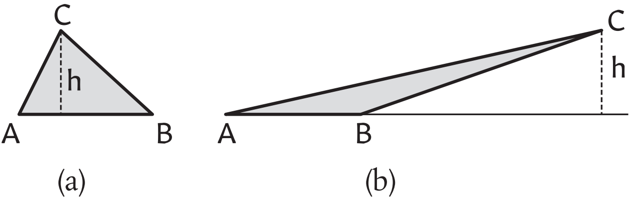
Obecný vzorec pro obsah trojúhelníka je znázorněn na obrázku 35.



Obr. 35: Obsah trojúhelníka.

Můžeme ho snadno dokázat, když daný trojúhelník rozdělíme výškou na dva pravoúhlé trojúhelníky. Jak jsme viděli v 5. kapitole, každý z nich má obsah rovný polovině součinu výšky a základny. Když je tedy sečteme, dostaneme požadovaný výsledek.

A pokud je situace jako na obrázku 36b s *tupoúhlým* trojúhelníkem, výsledek *opět* dostaneme, jen s tím rozdílem, že místo sčítání musíme obsahy trojúhelníků od sebe odečíst.



Obr. 36: Stejný obsah!

Protože oba trojúhelníky na obrázku 36 mají stejnou výšku h a stejnou základnu AB, mají i stejný obsah, a to zůstane v platnosti *bez ohledu na to, jak daleko doprava posuneme bod* C, pokud ho budeme posouvat po přímce rovnoběžné s AB, takže výška h se nezmění.

To byl zřejmě jeden z prvních geometrických výsledků, které zapůsobily na Isaaca Newtona v době jeho studií na univerzitě v Cambridgi.

Podle dobového svědectví totiž začal číst Eukleidovy *Základy* v roce 1663, ale úvodní tvrzení považoval za tak triviální, že se

> divil, jak vůbec někoho mohlo bavit psát jejich důkazy.

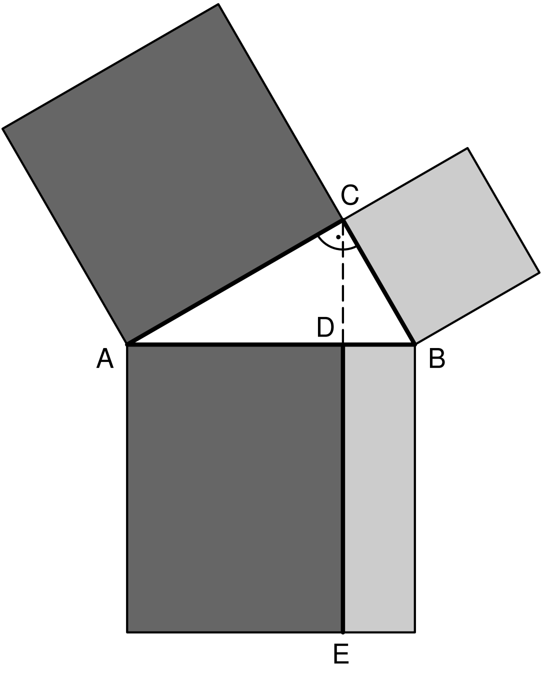
Přesto mu, tak jako většině z nás, výsledek na obrázku 36 rozhodně nepřipadal samozřejmý.

A je zajímavé, že právě tento výsledek měl později hrát významnou roli v jeho zkoumání pohybů planet, což ještě uvidíme.

Prozatím je to vše, co potřebujeme, abychom se mohli pustit do Eukleidova velmi osobitého důkazu Pythagorovy věty.

Eukleidův důkaz Pythagorovy věty

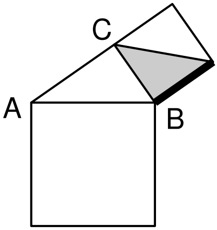
Začneme tím, že na obrázku 37 sestrojíme tři čtverce nad stranami pravoúhlého trojúhelníka, a pak nakreslíme úsečku CE kolmou k přeponě AB a její průsečík s AB označíme D.



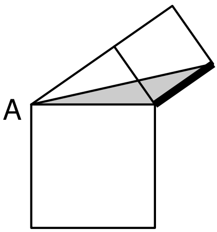
Obr. 37: Myšlenka Eukleidova důkazu.

Základní myšlenkou je dokázat, že světle vybarvený čtverec a světle vybarvený obdélník mají stejný obsah.

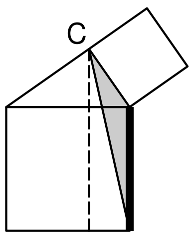
Stejným způsobem pak odůvodníme, že i tmavě vybarvený čtverec a tmavě vybarvený obdélník mají stejný obsah.



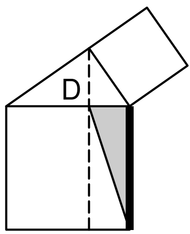
Začneme polovinou světle vybarveného čtverce.



Přesuneme vrchol trojúhelníka z bodu C do bodu A, přičemž základnu trojúhelníka (vyznačenou silnou čarou) zachováme.



Otočíme trojúhelník o 90° doleva kolem bodu B.



Při zachování základny tohoto trojúhelníka (vyznačené silnou čarou) přesuneme vrchol z bodu C do bodu D.

Obr. 38: Jádro Eukleidova důkazu (též strana 18, 42 a 185).

Z toho ihned plyne, že součet obsahů obou menších čtverců je roven obsahu čtverce nad přeponou, a věta je tím dokázána.

Klíčové tedy je dokázat tvrzení o světle vybarveném čtverci a obdélníku na obrázku 37.

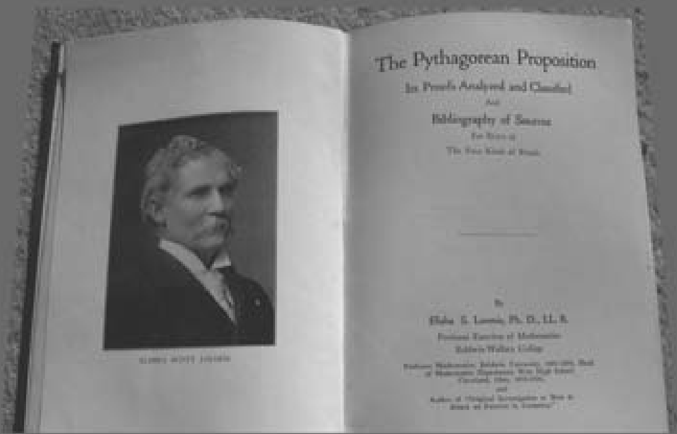
K tomu účelu se zaměříme na *polovinu* světle vybarveného čtverce (obrázek 38).

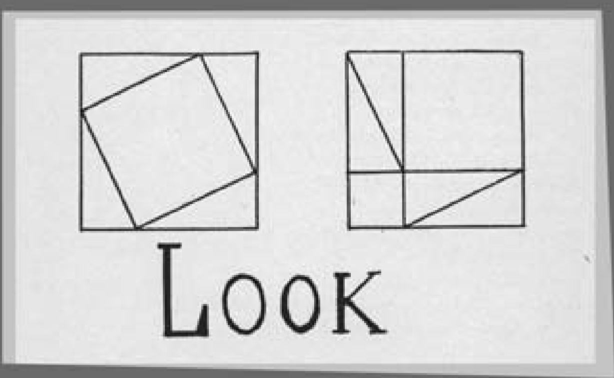
Krása důkazu spočívá v tom, že každý krok na obrázku 38 zachovává velikost vybarveného obrazce, takže vybarvený trojúhelník na konci má stejný obsah jako stejně vybarvený trojúhelník na začátku. A když oba zdvojíme, dostaneme hledaný výsledek.

Jediný poněkud neformální krok – otočení trojúhelníka o 90° kolem bodu B – můžeme odůvodnit přesně tím, že oba trojúhelníky jsou shodné podle věty sus, protože úhel při vrcholu B v obou trojúhelnících je součtem úhlu ABC a pravého úhlu.

371 důkazů Pythagorovy věty

Elisha Scott Loomis z Clevelandu v Ohiu
vydal v roce 1927 knihu obsahující
230 důkazů Pythagorovy věty...





Ve druhém vydání z roku 1940 počet důkazů vzrostl na 371. Mezi nimi byl i důkaz šestnáctileté studentky z Indiany...

Pythagoras Was Right; Schoolgirl Proves It!

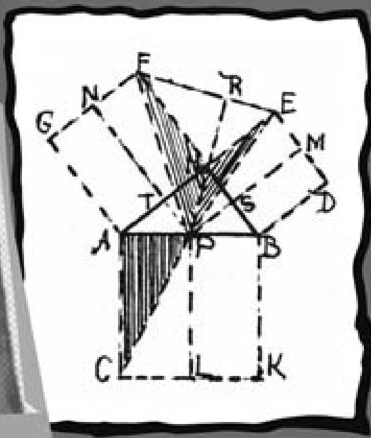
South Bend, Ind., Oct. 27.—(AP)—Ann Condit, junior in Central High School here, was credited today with working out a new proof of the Pythagorean theorem.

This geometric proposition, originated by the Greek philosopher, Pythagoras, is that the square of the hypotenuse or long side of a right angle triangle equals the sum of the squares of the two shorter sides.

The solution is the only one in which the middle point of the hypotenuse of the triangle under consideration is the origin of all auxiliary lines and triangles.

Z novin *Indianapolis Star* z 28. října 1938

Ann Conditová na Wellesley College v roce 1944



(Poznámky, strana 247)