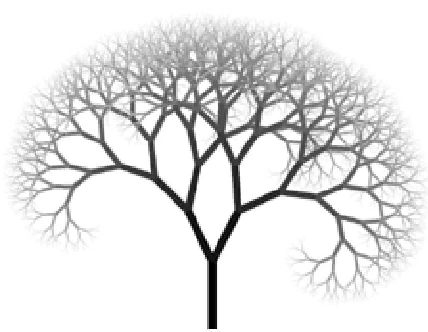
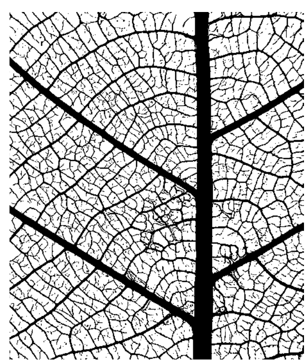
Fraktály v přírodě

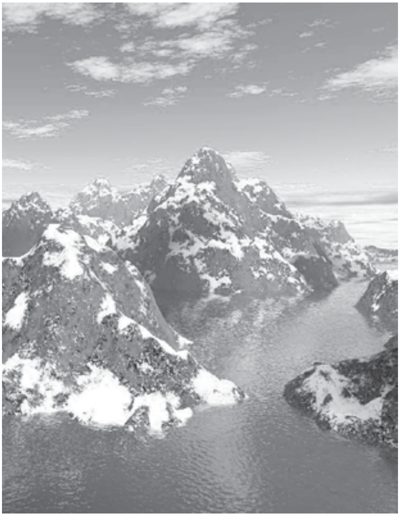
želva na větší želvě, ta na ještě větší želvě…

Jak by se dal popsat strom? Lze například říci, že strom je prut, z něhož vychází více menších stromků. Možná to není příliš poetické, jakmile ale určíme, kolik větví musí strom mít a jaké úhly mají větve tvořit s kmenem, bude to dostatečně přesné na to, aby počítač dokázal takový strom poměrně realisticky nakreslit (*dole vlevo*). Schránku loděnky můžeme popsat jako menší schránku loděnky s přidaným úsekem (*naproti, dole vlevo*). V obou případech celek definujeme jeho menšími částmi.

Proč má v přírodě tolik struktur podstatu fraktálu? Jednou z příčin je, že fraktály často vznikají spontánně, a to opakovaným uplatňováním určitého jednoduchého pravidla (*viz říční delta naproti*). Příroda používá fraktály rovněž z důvodu úspornosti (*viz vzor žilkování listu dole vpravo*), protože fraktální struktury bývají často nejefektivnějším způsobem, jak splnit daný úkol, ať jím je zachycení slunečního světla listem stromu nebo doprava kyslíku z plic krví do celého těla.

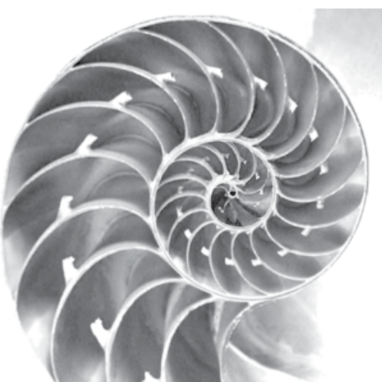






Fraktální krajina, jaká se obvykle využívá v dnešní filmové tvorbě, generovaná ze 100 % počítačem.

Vodní cesty a přítoky této říční delty tvoří fraktál, podobný svou strukturou stromu.



Nalevo: Stromy a listy vykazují mezi částmi a celkem soběpodobnost, která je jednou z charakteristik fraktálů.
Nahoře: Logaritmické spirály jsou soběpodobné v jakémkoli měřítku, jak vidíme na schránce loděnky (vlevo) nebo výhonku kapradě (vpravo).

Kochova vločka

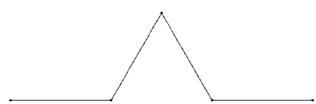
první fraktál

Určující charakteristikou fraktálu je to, že když jej budeme zvětšovat, odhalíme vždy další a další detaily. U fraktálů v přírodě, jako jsou květákové růžice nebo obrysy pobřeží, se zvětšené oblasti v detailech liší; většina matematických fraktálů je naproti tomu soběpodobná – to znamená, že zvětšený detail je zcela shodný s celkem. První takový soběpodobný fraktál popsal v roce 1904 švédský matematik Helge von Koch a jeho konstrukce je velmi snadná.

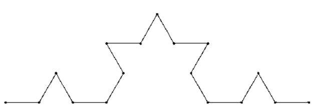
Vycházíme z obyčejné úsečky (1., *viz dole*); její prostřední třetinu o něco prodloužíme a postavíme z ní rovnostranný „stan“ (2.), čímž získáme čtyři úsečky shodné délky; jestliže u všech zopakujeme stejný postup, dostaneme se do druhé fáze (3.); a to celé děláme dál (4.).

Pokud celý postup zopakujeme nekonečněkrát (!), dostaneme Kochovu křivku. Sestavíme-li ze tří Kochových křivek trojúhelník, vznikne nám Kochova vločka (*naproti nahoře*). Zjistíme přitom něco velmi pozoruhodného – vločka má nekonečně dlouhý obvod, ale obsah takto ohraničené plochy je konečný.

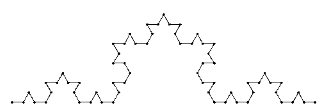
1.



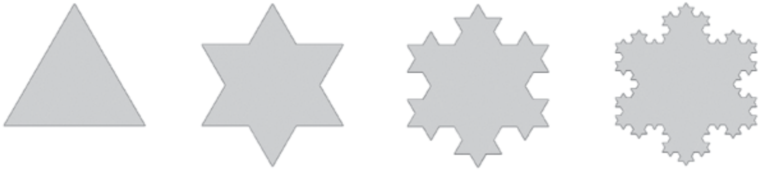
2.



3.

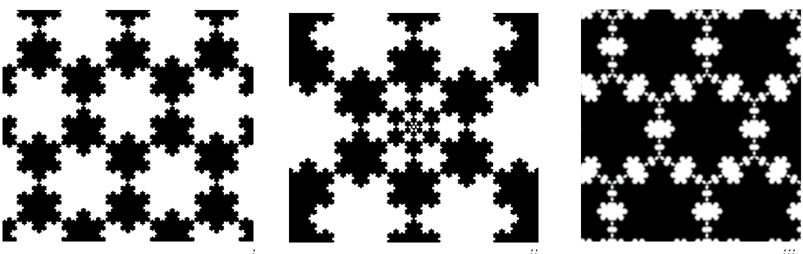


4.



Čtyři fáze konstrukce Kochovy vločky. V každé fázi se délka obvodu stejnou měrou zvětší, takže po nekonečném počtu fází je obvod vločky nekonečně dlouhý, třebaže její obsah zůstává konečný (vločka se tak snadno vejde na stránku této knihy) a je přesně o 60 % větší než výchozí trojúhelník.

Čtyři fáze konstrukce převrácené Kochovy vločky, tzv. antivločky, do sebe obráceného sourozence původní Kochovy vločky z horního obrázku. Tento obrazec také vyjde, když vločky umístíme vedle sebe. Délka obvodu antivločky je stejně jako v prvním případě nekonečná, její obsah ale představuje jen 40 % jeho původní podoby.



i. ii. iii.

i. Jelikož je Kochova vločka soběpodobná, bude velká Kochova vločka přesně zapadat do vločky $\sqrt{3}$krát menší. ii. Plochu můžeme beze zbytku pokrýt také vločkami, které se budou donekonečna zmenšovat. iii. Vločky a antivločky do sebe také zapadají, takže jimi lze vydláždit celou plochu.

Hausdorffovy dimenze

jak dlouhé je pobřeží?

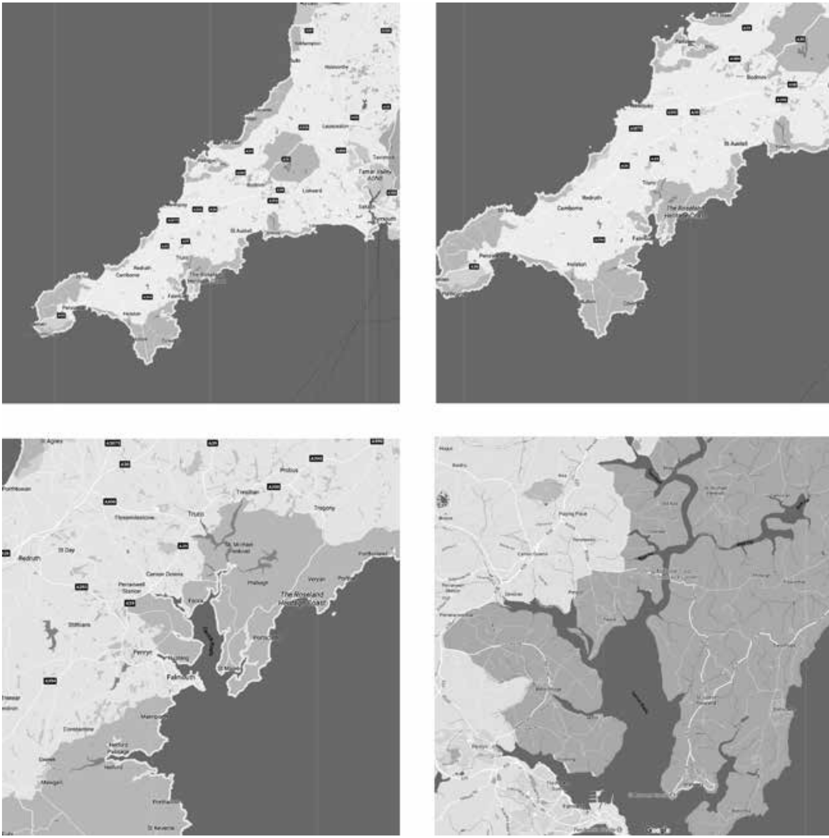
Svět, v němž žijeme, je trojrozměrný. Povrch stolu má dvě dimenze, čára (i klikatá) má rozměr jen jeden.

Jednou z možností, jak zjistit, kolik má daný objekt dimenzí, je spočítat, kolik čísel potřebujeme k přesnému určení jeho libovolného bodu. Jestliže kamarádovi řekneme, že hospoda je na ulici 3 kilometry od nás, naznačujeme tím, že ulici chápeme jako jednorozměrnou přímku. Naše satelitní navigace potřebuje dvě čísla – zeměpisnou délku a šířku, takže povrch Země chápe jako dvourozměrný.

Jak je to ale s Kochovou křivkou? Vypadá jako čára, čili by to měl být jednorozměrný objekt. Naše metoda zde ale nefunguje, protože tato křivka je nekonečně dlouhá a všechny body na ní jsou od jejího začátku nekonečně vzdálené!

Jak bychom mohli dimenze počítat lépe? Krychle je trojrozměrná, protože chceme-li zdvojnásobit její objem, budeme potřebovat 8 jednotkových krychlí – a 8 je 2^3 ($2 \times 2 \times 2$). Na čtverec 5×5 potřebujeme 25 jednotkových čtverců – a 25 je 5^2. Úsečka dlouhá 7 jednotek se skládá ze 7 jednotkových úseček – a 7 je, samozřejmě, 7^1. Objevujeme zde zřejmé pravidlo: potřebujeme-li l jednotkových objektů, abychom objekt zvětšili m-krát, pak počet dimenzí objektu představuje exponent d ze vzorce $l = m^d$.

Kochova křivka je sestrojena ze 4 jednotkových úseček. Jestliže spojíme 4 Kochovy křivky, dostaneme Kochovu křivku, která bude přesně 3krát větší. Použijeme-li symboly z předešlého odstavce, znamená to, že $l = 4$ a $m = 3$, takže hledáme d takové, aby $3^d = 4$. Toto číslo je 1,262 a je to takzvaná *Hausdorffova dimenze* Kochovy křivky (*viz Dodatek, strana 58*). A jelikož je tato veličina větší než 1 a menší než 2, je Kochova křivka více než čára – ale méně než plocha!



Jak dlouhé je pobřeží britského Cornwallu? Jestliže použijeme mapu a kompas a budeme nastavovat směr vždy znovu po 5 mílích (8 km), odměříme na mapě trasu kolem poloostrova z Plymouthu do Bude ve zhruba 35 krocích o celkové délce asi 280 km. Když ale budeme znovu nastavovat směr vždy po 1 míli (1,6 km), budeme zacházet do mnohem více zátok a do ústí mnohem více řek, takže tato trasa bude dlouhá asi 340 km; jinými slovy, z každé z původní pětimílové vzdálenosti se stane 6 mil. Hausdorffova dimenze Cornwallu je tedy asi 1,11 ($5^{1,11} = 6$). „Oficiální" vzdálenost z Plymouthu do Bude po South West Coast Path je 467 km, to však platí jen pro nás. Pro mravence by tato vzdálenost byla mnohem větší, protože by musel přelézt každý kámen.

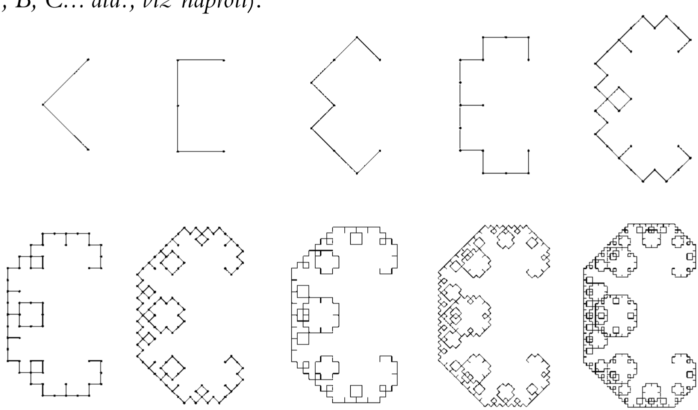
L-SYSTÉMY

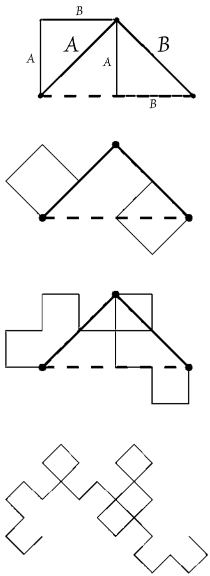
jdi vpřed, otoč se doprava, pak doleva

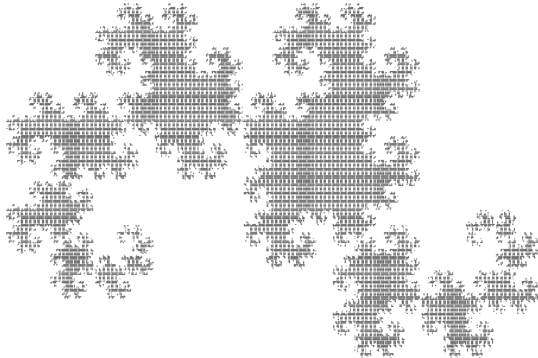
Kochovu křivku (*strana 4*) můžeme definovat jednoduchým postupem: jdi o jeden krok vpřed (to si označíme symbolem A); otoč se doleva o 60° (symbol +); jdi vpřed (A); otoč se doprava o 60° (–); otoč se doprava o dalších 60° (–); jdi vpřed (A); otoč se doleva o 60° (+); jdi vpřed (A). Můžeme to zapsat v podobě krátkého řetězce „A + A – – A + A: 60°“. Další a další stupně složitosti budeme vytvářet tak, že v tomto přepisu budeme postupně nahrazovat každé „A“ kopií celého řetězce:

A → (A + A – – A + A) → (A + A – – A + A) + (A + A – – A + A) – – (A + A – – A + A) + (A + A – – A + A) → …

Takové řetězce se nazývají L-systémy, podle maďarského biologa Aristida Lindenmayera, který tuto myšlenku rozpracoval v 60. letech 20. století pro popis růstu rostlin. *Lévyho křivka C* (*dole*) je vyjádřena řetězcem „+ A – – A +: 45°“. Složitější L-systémy mají více než jeden symbol (*A, B, C… atd., viz naproti*).

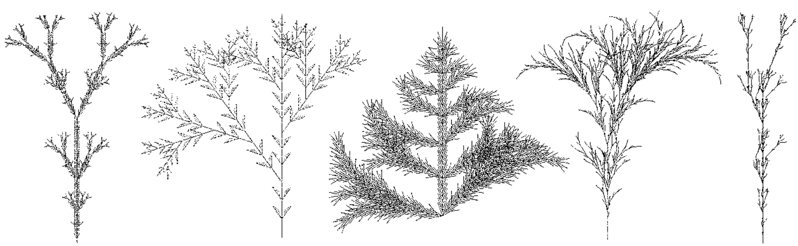






Zajímavé vlastnosti má dračí křivka. Vezmeme-li proužek papíru, přeložíme jej napůl, ještě jednou napůl a pak jej necháme, aby se rozevřel o 90°, dostaneme tvar, jaký vidíme na prvním z diagramů nalevo. Po každém přeložení napůl vznikne další fáze. Jelikož dvě kopie této křivky složí křivku, která bude $\sqrt{2}$krát větší, je její Hausdorffova dimenze $\log(2)/\log(\sqrt{2}) = 2$.

Dračí křivka: $A \longrightarrow A - B \quad B \longrightarrow A + B$ úhel = 90°



Různé L-systémy keřů, řas a travin, jak je vypracoval Paul Bourke. Druhý obrázek zleva vyžaduje 21 pravidel, tráva zcela napravo potřebuje jen tři. Pravidla pro tyto a další rostliny najdeme na http://paulbourke.net/fractals.

Křivky vyplňující prostor

jak husté mohou být?

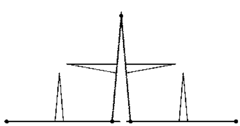
Zní to sice nepravděpodobně, lze však sestrojit čáru, která bude procházet každým bodem určité části roviny. Fraktál na obrázku dole (zvaný *Cesàrův fraktál*) je úzce příbuzný s Kochovou křivkou tím, že jeho první fáze sestává ze čtyř úseček shodné délky, jen úhel na vrcholu trojúhelníku nemá 60°, ale je mnohem menší.

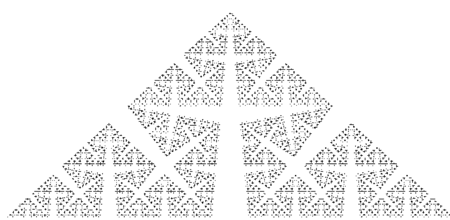
Pokud se bude tento úhel blížit nule a my budeme postupovat do stále dalších fází, nakonec touto křivkou zaplníme celou plochu trojúhelníku.

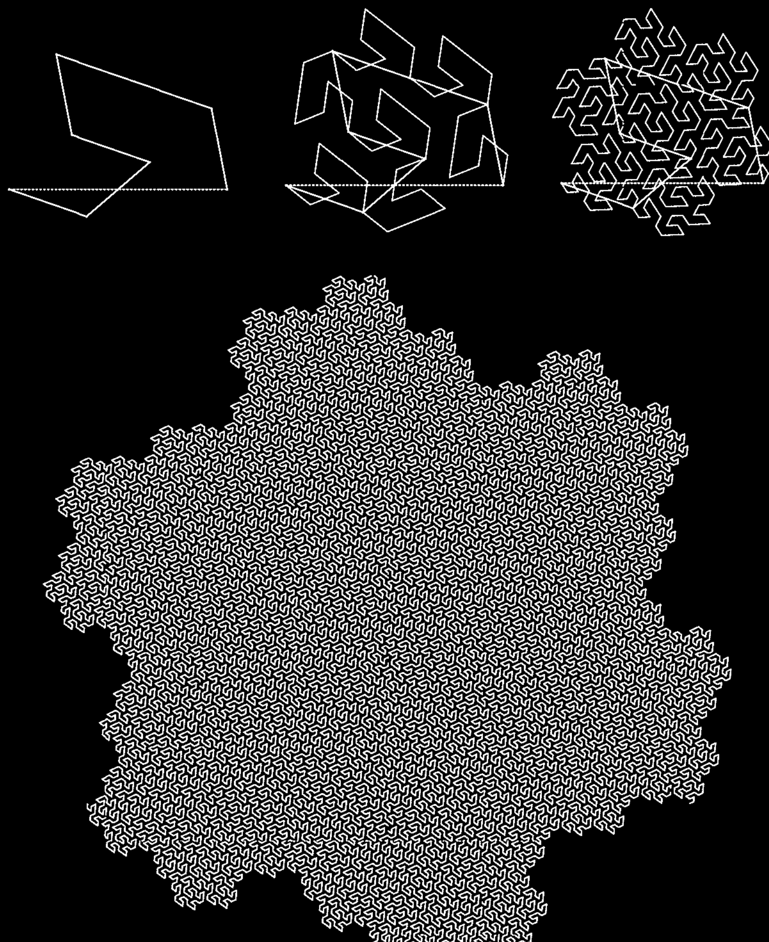
Naproti máme nádhernou, prostor vyplňující *Peano-Gosperovu křivku*. Ta je tvořena 7 jednotkovými úsečkami a používá dvě definice A a B:

A → A + B + + B – A – – A A – B +
B → – A + B B + + B + A – – A – B : úhel 60°

Křivka je důmyslně konstruována tak, že jejích 7 úseček nakonec propojuje základní čára dlouhá přesně √7 (přepona trojúhelníku se základnou 2,5 a výškou √3/2 je √7). Její Hausdorffova dimenze je tedy, stejně jako u dračí křivky, $\log_{(7)}/\log_{(\sqrt{7})} = 2$. Všechny křivky vyplňující beze zbytku prostor mají Hausdorffovu dimenzi rovnou dvěma (ne všechny křivky s HD = 2 však vyplňují prostor).







Obal Peano-Gosperovy křivky tvoří deformovaný šestiúhelník a křivka sama – stejně jako standardní šestiúhelník – beze zbytku vyplní rovinu.